

Φασματικό Θεώρημα για πίνακες
 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός πίνακας. Τότε υπάρχει
 ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ που αποτελείται από
 ιδιοδιανύσματα του A .

$$A^+ = A \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^+ A P \quad \leftarrow P \text{ ορθογώνιος}$$

Ερμητιανός χώρος

$$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

Εσωτερικό γινόμενο
 $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

i) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

ii) $\langle \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}_2, \vec{b} \rangle \quad (\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$$\langle k\vec{a}, \vec{b} \rangle = k \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}_1 \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}_2 \rangle$$

$$\langle \vec{a}, k\vec{b} \rangle = k \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

iii) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$ και $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ αν $\vec{a} = \vec{0}$
 $\in \mathbb{R}$

$$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_n$$

$$\vec{p}_1 = \vec{a}_1$$

$$\vec{p}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{p}_1 \rangle}{\langle \vec{p}_1, \vec{p}_1 \rangle} \vec{p}_1 \quad \vec{x}_1 = \frac{\vec{p}_1}{\|\vec{p}_1\|} \vec{x}_2$$

$$f: V \rightarrow V$$

$$f: E \rightarrow E$$

V Ερμητιανός

E Ευκλείδειος

f^* η προσαρτημένη απεικόνιση της f
 (συζυγής)

$$\langle f(\vec{a}), \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, f^*(\vec{b}) \rangle$$

$$[f^*]_{\gamma}^{\gamma} = ([f]_{\gamma}^{\gamma})^* = ([f]_{\gamma}^{\gamma})^+$$

γ ΟΚΒ

$$(f^*)^* = f$$

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται αυτοπροσαρτημένη
 αν $f^* = f$.

Πρόταση Έστω $(V, \langle, \rangle)$ ένας Ερμιτιανός χώρος και $f: V \rightarrow V$ μια αυτοπροσδιορισμένη γραμμική απεικόνιση. Κάθε ιδιοτιμή της είναι πραγματικός αριθμός.

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή της f , άρα υπάρχει $\vec{a} \neq \vec{0}$ τ.ω. $f(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$

$$\lambda \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \lambda \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle f(\vec{a}), \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, f^*(\vec{a}) \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{a} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

Από $(\lambda - \bar{\lambda}) \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ και $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ αφού $\vec{a} \neq \vec{0}$
 $\Downarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}$

Πόρισμα Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός συμμετρικού πραγματικού $n \times n$ πίνακα έχει όλες του τις ρίζες πραγματικούς αριθμούς

$$[f_A]_E^E = A, \quad [f_A^*]_E^E = \left(\left([f_A]_E^E \right)^T \right)^+ = \bar{A}^+ \stackrel{A \text{ συμμετρικός}}{=} A^+ = A$$

$f_A^* = f_A$ άρα f_A αυτοπροσδιορισμένη

Φασματικό Θεώρημα για γραμμικές απεικονίσεις
 Έστω f μια αυτοπροσδιορισμένη απεικόνιση από τον E στον E , όπου E Ευκλείδειος χώρος διάστασης n . Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του E που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f .

Επαγωγή στο n

$$n=0 \quad E = \langle \vec{0} \rangle \quad \phi$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει το Θεώρημα για κάθε Ευκλείδειο χώρο διάστασης λ . Θ δ ο ισχύει για τον E διάστασης $\lambda + 1$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή της f και $\vec{\alpha}_1$ ένα ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 \Rightarrow f(\vec{\alpha}_1) = \lambda_1 \vec{\alpha}_1$

$$\vec{x}_1 = \frac{\vec{\alpha}_1}{\|\vec{\alpha}_1\|} \quad V = \langle \vec{x}_1 \rangle$$

$$V^\perp = \{ \vec{\beta} \in E \mid \langle \vec{\beta}, \vec{x}_1 \rangle = 0 \}$$

ιδιοδιάνυσμα f

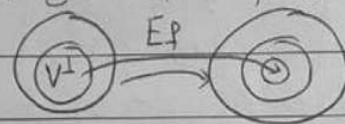
Ισχυρίζομαι ότι $f(V^\perp) \subseteq V^\perp$

(Αποδ. Έστω $f(\vec{\beta}) \in f(V^\perp)$ όπου $\vec{\beta} \in V^\perp$

$$\langle f(\vec{\beta}), \vec{x}_1 \rangle = \langle \vec{\beta}, f(\vec{x}_1) \rangle = \langle \vec{\beta}, \lambda_1 \vec{x}_1 \rangle = \lambda_1 \langle \vec{\beta}, \vec{x}_1 \rangle = 0$$

$$f(V^\perp) \subseteq V^\perp$$

$$g = f|_{V^\perp} \quad V^\perp \rightarrow V^\perp$$



g αυτοπροσαρτημένη $\dim V^\perp = n$

Αρα από την επαγωγή μπορώ να βρω μία ορθοκανονική βάση του $V^\perp$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της g . Έστω την $[\vec{x}_1, \vec{x}_{n+1}]$

$$f(\vec{x}_i) = g(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i \quad \text{όρα } \vec{x}_i \text{ ιδιοδιάνυσμα της } f$$

f αυτοπροσαρτημένη

$$[fA]_E \quad \vec{x}_1, \vec{x}_{n+1} \text{ ΟΚΒ του } E.$$

$$A^* = (\overline{A^t}) = (\overline{A})^t$$

Ευκλείδειος χώρος

Ερμιτιανός χώρος

A ορθογώνιος

$$A^t A = I_n$$

A μοναδιαίος

$$A^* A = I_n$$

A συμμετρικός

$$A^t = A$$

A ερμιτιανός

$$A^* = A$$

Άσκηση Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ βρείτε
 ορθογώνιο πίνακα P τ.ω.
 $P^T A P$ να είναι διαγώνιος

$A^T = A$ A συμμετρικός φασματικός $\mathbb{R}^{n \times n}$ έχει ΟΧΒ
 που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A .

Ιδιοτιμές

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0 + (2-x) \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} + 0$$

$$= (2-x) [(3-x)(1-x) - 1] = (2-x)(x^2 - 4x + 3 - 1)$$

$$= (2-x)(x^2 - 4x + 2)$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Άσκ 3 Φύλ 7

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (ax - y + 2, -x + by - 2, x - y + 2z)$$

όπου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $a, b \in \mathbb{R}$

Βρείτε τα a, b ε.ω. η f να έχει ιδιοτιμή το 1 με πολλαπλότητα 2.

$$[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ να έχει το } 1 \text{ ιδιοτιμή με πολλαπλότητα } 2$$

$\mathbb{O}$ A είναι συμμετρικός φασματικός $\Rightarrow$ A διαγωνίσιμος

$\Rightarrow$ αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 1 ισούται
 με την γεωμετρική. $\Rightarrow 2 = \dim V(1) = 3 - \text{rank}(A - I)$
 $\Rightarrow \text{rank}(A - I) = 1$

$$-\text{rank} \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ -1 & b-1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ -1 & b-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a-1 & b-1 & -1 \\ a-1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-(a-1)r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & b-2 & 0 \\ 0 & -1+(a-1) & 1-(a-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & b-2 & 0 \\ 0 & a-2 & 2-a \end{pmatrix} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} b-2=0 \\ a-2=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{χαίρει αν } b-2 \neq 0 \\ \text{θα είναι 2} \\ \text{αξίες } b \text{ και } a \\ \text{οπότε rank}=2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & 1-x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1-r_3 \\ r_2+r_3}} (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 0 \\ -1 & 3-x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & -2 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)((x-2)(x-3)-2) = (1-x)(x^2-5x+4) = (1-x)(x-1)(x-4)$$

Ιδιοτιμές 1 (διπλή) 4 (απλή)

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (A - 1I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(A - I \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x - y + z = 0 \quad x = s - t$$

$$\left. \begin{array}{l} y = s \\ z = t \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = s \\ z = t \end{array} \quad V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Μια βάση του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f .

$$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\beta}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{\beta}_1 \rangle}{\langle \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1 \rangle} \vec{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$V(4) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 + 2r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 + 2r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x - y - 2z = 0$$

$$x = t$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$y + z = 0$$

$$y = -t$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$z = t$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$B^m = A \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (P^t) A \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^{1/m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^{1/m} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix} = P^t A P$$

$$\Gamma^m = P^t A P$$

$$P \Gamma^m P^t = P (P^t A P) P^t$$

$$P \Gamma P^t = A$$

$$P \Gamma P^t P \Gamma P^t P \Gamma P^t = A \Rightarrow (P \Gamma P^t)^m = A$$

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός πίνακας. Ο A λέγεται **θετικός** (θετικά ορισμένος) και συμβολίζεται $A > 0$ αν ισχύει $X^T A X > 0$, για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ με $X \neq 0_{n \times 1}$.

Πχ ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι θετικός

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, A^T = A \text{ άρα } A \text{ συμμετρικός}$$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z) \begin{pmatrix} 2x-y \\ -x+2y-z \\ -y+2z \end{pmatrix} =$$

$$= x(2x-y) + y(-x+2y-z) + z(-y+2z) =$$

$$= 2x^2 - xy - xy + 2y^2 - yz - yz + 2z^2 =$$

$$= 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + 2z^2 =$$

$$= x^2 + x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 =$$

$$= x^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 \geq 0$$

$$\text{Έστω } x^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 = 0$$

$$x=0 \quad x-y=0 \quad y-z=0 \quad z=0$$

$$y=0$$

Άρα $X^T A X > 0$ για κάθε $X \neq 0_{3 \times 1}$

Άρα $A > 0$

Ορισμός: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $A^T = A$ συμμετρικός. Ο A λέγεται **αρνητικός** και συμβολίζεται με $A < 0$ αν $X^T A X < 0$ για κάθε $X \neq 0_{n \times 1}$.

Ορισμός: Ο A λέγεται **μη αρνητικός** και συμβολίζεται με $A \geq 0$ αν $X^T A X \geq 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Ορισμός: Ο A λέγεται **μη θετικός** και συμβολίζεται με $A \leq 0$ αν $X^T A X \leq 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.